# Problemes

Hem arribat al problema 100! Aquesta secció, que no seria res sense els seus amabilíssims corresponsals, ha aconseguit aquesta fita. I això ha esdevingut perquè diverses persones, durant força temps, han volgut compartir el seu gust pels problemes i, en definitiva, el seu amor per les matemàtiques, mitjançant aquestes pàgines.

Així, doncs, José Luis Díaz-Barrero, Enric Ventura, Xavi Ros i Pelegrí Viader ens proposen, respectivament, els problemes **A97**, **A98**, **A99** i **A100**.

I en una línia que ja resulta normal, hem rebut resposta a tots els problemes proposats al número anterior, a més de dues solucions al problema **A90**: d'Alex Sierra, la publicada, i de Joaquim Nadal.

Del problema **A93** hem rebut la solució de Xavi Ros, que publiquem, i la de Bruno Salgueiro a més d'una altra que, malauradament és errònia. D'Alfred Peris, en publiquem la solució del problema **A94**, i n'hem rebudes dues més: una de Joaquim Nadal i l'altra de José A. Conejero.

Joaquim Nadal també ens proporciona la solució del problema **A95**, que surt en aquestes pàgines, tot tenint en compte que també hem rebut sengles solucions de Miquel Amengual i de Bruno Salgueiro.

Finalment, publiquem la solució del problema **A96** de Bruno Salgueiro, i mencionem que Joaquim Nadal ens n'ha enviada una altra.

Moltíssimes gràcies, doncs, a tothom pel seu valuós treball i per la seva voluntat de compartir esforços i plaers. I ja pensant en el proper número del *SCM/Notícies*, us recordem que ens facilitareu moltíssim la feina d'elaborar la secció si treballeu amb TEX o LaTEX. Naturalment, però, aportacions en qualsevol altre format, també manuscrites, són igualment ben rebudes. Les adreces de correu per enviar-nos-les són cromero@xtec.cat o bé carles.romero.c@gmail.com. Fins a la propera! A tothom: moltíssimes gràcies!

## Problemes proposats

**A97.** (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin $a$, $b$ i $c$ les longituds dels costats d'un cert triangle $\triangle ABC$ amb $r$ i $R$ com a radis respectius de les circumferències inscrita i circumscrita en aquest triangle. Demostreu que

$$\frac{a+b}{c^3+abc}+\frac{b+c}{a^3+abc}+\frac{c+a}{b^3+abc}>\frac{1}{r^2+R^2}.$$

**A98.** (Proposat per Enric Ventura, UPC, Manresa.) Quins són els deu primers decimals de $\sqrt[0,0000000001]{0,0000000001}$? I els de $\sqrt[1,0000000001]{1,0000000001}$?

**A99.** (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Sigui $\{a_n\}$ una successió de nombres reals positius i sigui $x>0$.

*a*) Proveu que la sèrie $\sum \dfrac{a_1\cdots a_{n-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}$ és convergent.

*b*) Proveu que, si $\sum \frac{1}{a_n}$ divergeix, aleshores

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1\cdots a_{n-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_n)}=\frac{1}{x}.$$

**A100.** (Proposat per Pelegrí Viader i Canals, UPF, Barcelona.) Fent servir únicament una moneda, com poden, tres amics, decidir qui paga les begudes?

## Solucions

**A90.** (Proposat, de manera simplificada, a l'activitat «Fem Matemàtiques 2009» (FEEMCAT) per a alumnes de 2n d'ESO.) Considereu el joc següent: dos jugadors comencen amb $n\geq 2$ fitxes sobre la taula i en van retirant certes quantitats alternativament, tot respectant les dues regles següents: 1) el primer jugador no se les pot endur totes en la primera tirada, i 2) a cada jugada (posterior a la primera) el jugador que té el torn ha de retirar com a mínim una

fitxa i com a màxim el doble de les retirades per l'altre jugador en la tirada immediatament anterior. El joc s'acaba quan algú retira l'última fitxa de la taula, i el jugador que se la queda n'és el guanyador.

Estudieu si hi ha alguna estratègia, en funció de $n$ i de si ets primer o segon jugador, que et permeti guanyar sempre.

**Solució:** (Solució d'Àlex Sierra Ballarín, CFA Freire, Barcelona.) Establirem que el segon jugador guanya si, i només si, $n$ és un terme de la successió de Fibonacci (per exemple un element de la successió 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...). Comencem per establir el següent

Lema: Si $F_k$ i $F_{k+1}$ són termes consecutius de la successió de Fibonacci més grans o iguals que 2, aleshores

$$2F_{k-1} = 2\left(F_{k+1} - F_k\right) \geq F_k$$

o, el que és el mateix

$$F_{k+1} \geq \frac{3}{2}\,F_k.$$

Això es demostra fàcilment per inducció, amb $F_3 = 2$ i $F_4 = 3$ com a cas base. Tenim:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \geq \frac{3}{2}\,F_{k-1} + \frac{3}{2}\,F_{k-2} = \\ = \frac{3}{2}\,\left(F_{k-1} + F_{k-2}\right) = \frac{3}{2}\,F_k$$

com volíem demostrar. Ara considerem dos casos:

1) El nombre $n$ és un nombre de Fibonacci.

Sigui $n = F_k$ i vegem quina estratègia ha de seguir el segon jugador: si $n = 2$ o $n = 3$, és evident que el segon jugador guanya la partida. Considerem, doncs, $n > 3$. Pel lema, si el primer jugador redueix el nombre de fitxes a un nombre igual o inferior al nombre de Fibonacci immediatament anterior, $F_{k-1}$, el segon jugador guanya perquè es pot endur totes les fitxes que queden.

Suposem, per tant, que el primer jugador s'enduu menys de $F_{k-2} = F_k - F_{k-1}$ fitxes, de manera que, sobre la taula, queden més de $F_{k-1}$ fitxes. En aquest cas el segon jugador actua com si es tractés d'una partida amb $F_{k-2}$ fitxes. Per inducció, el segon jugador guanya en les dues subpartides successives: la primera amb $F_{k-2}$ fitxes i objectiu deixar-ne $F_{k-1}$, i la segona partint de $F_{k-1}$ fitxes amb l'objectiu d'endur-se'n la darrera.

Per exemple, posem $n = F_k = 34$, $F_{k-1} = 21$ i $F_{k-2} = 13$. Si el primer jugador enretira $F_{k-2} = F_k - F_{k-1} = 13$ o més fitxes, en deixa $F_{k-1} = 21$ o menys i el segon jugador guanya perquè pot emportar-se-les totes. En cas contrari, el segon jugador ha de respondre com si es tractés d'una partida amb 13 fitxes, tot ignorant-ne, de moment, 21. L'objectiu ja no ées endur-se-les totes, sinó deixar-ne 21; si el segon jugador guanya perquè pot passar de 13 a 0 fitxes, també pot passar de 34 a 21 fitxes, tot aplicant la mateixa estratègia. Un cop queden 21 fitxes guanya com a segon jugador per inducció.

2) El nombre $n$ no és cap nombre de Fibonacci.

El primer jugador, $A$, enretira tantes fitxes com calgui per deixar el nombre de Fibonacci $F_k$ més gran possible i el problema queda reduït al cas anterior, tot considerant que comença una nova partida en la qual $A$ passa a ser el segon jugador. Observem que l'altre jugador, $B$, no pot retirar totes les fitxes pel lema, ja que $A$ ha retirat menys de $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ fitxes.

Observació: De fet, $B$ no disposa de tantes opcions com disposaria si es tractés d'una nova partida, ja que no pot retirar tantes fitxes com vulgui, però una limitació de $B$ no perjudica l'estratègia guanyadora de $A$.

**A93.** (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin $a$, $b$ i $c$ nombres reals tals que $0 < a, b, c \leq 1$. Proveu que

$$\frac{1}{\sqrt{1+2a}} + \frac{1}{\sqrt{1+2b}} + \frac{1}{\sqrt{1+2c}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+2\sqrt[3]{abc}}}.$$

**Solució:** (Solució de Xavi Ros Otón, estudiant, FME (UPC).) Sigui

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^x}}.$$

Com que

$$f''(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(1+2\mathrm{e}^x)^{5/2}}(1-\mathrm{e}^x)$$

la funció és convexa a l'interval $(-\infty, 0]$. Així, en aplicar la desigualtat de Jensen,

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

obtenim

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^x}}+\frac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^y}}+\frac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^z}}\leq$$
$$\leq\frac{3}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^{\frac{x+y+z}{3}}}}$$

si $x,y,z\leq 0$. Ara només cal posar

$$(x,y,z)=(\ln a,\ln b,\ln c)$$

com que es compleix que $x,y,z\leq 0$, i obtenim

$$\frac{1}{\sqrt{1+2a}}+\frac{1}{\sqrt{1+2b}}+\frac{1}{\sqrt{1+2c}}\leq$$
$$\leq\frac{3}{\sqrt{1+2\sqrt[3]{abc}}}$$

que és allò que volíem demostrar.

**A94.** (Proposat per Enric Ventura, UPC, Manresa.) Sis pirates roben un tresor de 100 monedes d'or. Després de discutir una estona sobre com repartir-se'l es posen d'acord a seguir l'algorisme següent:

1) s'ordenen de jove a vell,

2) el més jove fa una proposta de repartiment (per exemple, «totes per a mi»),

3) la proposta la voten entre tots (inclòs el mateix proponent), amb les opcions de vots «a favor», «en contra» i «vot en blanc», i

4) si el resultat és favorable, apliquen la proposta de repartiment en qüestió i se'n van cap a casa contents; en cas desfavorable o d'empat, maten el més jove (recordeu que són pirates!) i tornen al pas 2 de l'algorisme.

Tu ets el pirata més jove dels sis, quina proposta inicial faries per tal de sortir-ne viu, i marxar cap a casa amb la màxima quantitat possible de monedes d'or? (per resoldre el problema, hem de suposar que, a més de pirates, són matemàtics, que saben raonar, i que tots voten exclusivament en funció del màxim benefici propi).

**Solució:** (Solució d'Alfred Peris, Universitat Politècnica de València.) Numerem els pirates de l'1 al 6, del més jove al més vell, i jo sóc el pirata 1.

Començo pel desgraciat cas en què he de fer l'anàlisi des del més enllà. De fet, parteixo de la situació en què, per cobdícia o per falta d'habilitat, han matat fins al pirata 4 i solament queden vius el 5 i el 6. Certament, aquesta és una situació gens còmoda per al 5: qualsevol cosa que no siga donar-li totes les monedes al 6 suposarà un vot en contra, i la seua mort per empat. Fins i tot encara que li done tot el tresor al 6, el més vell té tot el dret a votar-hi en contra i matar-lo solament per plaer. Però això ja és una altra història...

En realitat, hauríem arribat a eixa situació perquè, en el pas previ, el pirata 4 va demostrar una total ineptitud: si s'haguera quedat amb 99 monedes, tot cedint tan sols una miserable moneda al 5, de bon segur que l'haguera tingut al seu favor (millor una que cap en el torn següent!), i un 2 a 1 haguera tancat l'assumpte.

També és veritat que van matar el pirata 3 per total incompetència, però, abans de pararnos a analitzar el cas de 4 pirates, deduiré una llei ben simple, amb un nombre $n>3$ de pirates i una quantitat $m\geq n$ de monedes, els pirates regits pel mateix algorisme, i amb les mateixes habilitats matemàtiques: en la seua proposta de repartiment, *el pirata més jove no ha de cedir ni una moneda al següent en edat.* La raó és ben senzilla: qualsevol proposta que li supose al segon pirata més jove un guany inferior al (saborós!) que obtindria en cas de tenir la paella pel mànec significarà el seu vot en contra. És a dir, el seu vot és massa car. Per a què aquest desaprofitament? Per tant, el que s'ha dit: el més jove no ha de donar al seu "successor" natural ni el lloro que duu damunt del muscle.

Aclarit aquest punt, tornem al desgraciat moment en què el pirata 3 va perdre la vida. Si haguera repartit 1 moneda al 5 i una altra al 6, quedant-se'n 98, quina situació haguera provocat? És bastant evident que el més vell li hauria votat a favor, ja que si passa al torn següent, com ja hem descrit, es queda sense no-res. Llavors contraresta el vot en contra del 4, i només queda per saber el vot del pirata 5. També està clar: indiferent per no augmentar ni disminuir el seu guany en cas de passar torn. Concloent: una estratègia perfecta per al 3 que li donava un màxim guany de 98 monedes i la seua vida!

Al seu torn, el cúmul de circumstàncies que van provocar la mort del pirata 2 és el no haver aplicat la màxima pirata de no donar res al seu successor i cedir una simple moneda, per exemple, a cadascun dels pirates 4, 5 i 6. Açò ens duu a la crònica de la meua desafortunada mort: hauria d'haver-me adonat que podia haver salvat la vida amb 96 monedes en la meua butxaca i repartint equitativament les altres 4 entre els

pirates 3 a 6! Encara sort que, com que no sóc pirata, i com a matemàtic més aviat mediocre, mai no em veuré en tal amarga situació.

Fixem-nos que, encara que ha quedat demostrat que aquesta proposta m'hauria donat un màxim benefici de 96 monedes tot salvant la vida, no obstant això, estem parlant d'una colla de pirates, no d'una ONG. D'una altra manera: la solució pel que fa a un guany màxim meu és única, però no el repartiment que jo puc realitzar de les 4 monedes que queden. Posem com exemple els casos següents:

Cas 1: Hi ha un pirata que em cau especialment bé. De fet, el més vell em va defensar durant tot el viatge de les bromes i burles de la resta de pirates restants. Doncs li donaré 2 monedes, una al 4, una al 5 i els altres dos res de res.

Cas 2: Els pirates 3 i 4 realment m'han fet la vida impossible durant tot el viatge. Em van llevar l'ampolla de rom que guardava sota el llit i, en plena borratxera, van matar el meu lloro. Com no els ho he de tenir en compte? Done 2 monedes al 5 i les altres 2 al més vell!

El cas 1 suposa el vot a favor del vell, que contraresta a 2, i els vots indiferents de 3 (que no guanyaria res si la cosa arriba al torn següent), 4 i 5. Amb això ja en tinc prou. Com va a ser la campanya electoral del pirata 2, que es frega les mans a l'espera del botí? Pot intentar convèncer-los que 2 de les seues 3 monedes (tots saben que no en cedirà ni una més!) passaran al pirata 5, pretenent canviar el seu vot d'indiferent a en contra meu, deixant al vell sense no res, i mantenint la meua proposta per als altres 2. En el cas 2, que jo m'havia guanyat a 5 i 6, els quals eren suficients per la indiferència de 3, el seu discurs podria anar en la línia de tractar, per exemple, de fer-se amb el més vell prometent-li les 3 monedes. Ara bé, en aquests casos o en altres possibles variacions, tot es basaria en la confiança que oferirà el pirata 2 als seus electors objectiu i, ja se sap, paraula de pirata...

**A95.** (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Tenim quatre cercles en el pla, cadascun tangent als altres tres i de manera que els tres cercles petits estan continguts en el més gran. Proveu que el radi del cercle gran és la suma dels altres tres, si i només si, els centres dels tres cercles petits formen un triangle rectangle.

**Solució:** (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva.) Siguin $X$ el centre de la circumferència gran, $A$, $B$ i $C$ els centres de les petites i $a \leq b \leq c < x$ els radis.

1) Vegem primer que $x = a + b + c$ implica que el triangle $\triangle ABC$ és rectangle. En efecte, és conegut que els centres de dues circumferències tangents i el punt de tangència estan alineats. Tenim, doncs,

$$\begin{aligned} XA &= x - a = (a+b+c) - a = b + c = BC \\ XB &= x - b = (a+b+c) - b = a + c = AC \\ XC &= x - c = (a+b+c) - c = a + b = AB. \end{aligned}$$

Això mostra que el quadrilàter de vèrtexs $A$, $B$, $C$ i $X$ té costats iguals dos a dos i les dues diagonals iguals, cosa que vol dir que és un rectangle i, així, el triangle $\triangle ABC$ és rectangle, tal com volíem veure.

2) Vegem ara el recíproc, és a dir, que $\triangle ABC$ rectangle implica $x = a + b + c$. Com que

$$\begin{aligned} AB &= a + b \leq b + c = BC \\ AC &= a + c \leq b + c = BC \end{aligned}$$

si $\triangle ABC$ és rectangle, aleshores $BC$ és la hipotenusa, $AB$ i $AC$ els catets i $A$ és l'angle recte. Segons el teorema de Pitàgores podem escriure

$$(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2$$

que dóna

$$a(a+b+c) = bc. \qquad (*)$$

Ara apliquem el teorema del cercle de Descartes

$$2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2.$$

En operar, obtenim

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = -\frac{2}{ax} - \frac{2}{bx} - \frac{2}{cx} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc}$$

i podem considerar l'expressió anterior com una equació de segon grau amb $1/x$ com a incògnita:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + L = 0$$

on $L = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{ab} - \frac{2}{ac} - \frac{2}{bc}$.

Aquesta equació té solucions

$$\frac{1}{x} = \frac{-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{2} \pm \pm \frac{\sqrt{4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 - 4L}}{2} =$$
$$= -\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \pm 2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}} =$$
$$= -\frac{bc+ac+ab}{abc} \pm 2\sqrt{\frac{c+b+a}{abc}}.$$

Com que $x > 0$, prenem

$$\frac{1}{x} = 2\sqrt{\frac{c+b+a}{abc}} - \frac{bc+ac+ab}{abc}$$

i, tot tenint en compte $(*)$, substituïm $c+b+a$ per $bc/a$:

$$\frac{1}{x} = 2\sqrt{\frac{\frac{bc}{a}}{abc}} - \frac{bc+ac+ab}{abc} =$$
$$= \frac{2}{a} - \frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{2bc-bc-ac-ab}{abc} =$$
$$= \frac{bc-ac-ab}{abc}.$$

Però, una altra vegada, la relació $(*)$ dóna $bc-ac-ab = a^2$ i, aleshores,

$$\frac{1}{x} = \frac{a^2}{abc} = \frac{a}{bc} = \frac{a}{a(a+b+c)} = \frac{1}{a+b+c}$$

o sigui,

$$x = a+b+c$$

com volíem veure.

Notes

**1.** Podeu trobar ressenyes més o menys detallades del teorema del cercle de Descartes a:

• Coxeter, H. S. M. *Introduction to geometry*, 2a edició. Nova York: John Wiley & Sons, 1969, p. 14.

• Barbu, Cătălin. *Teoreme fundamentale din geometria triunghiului*. Bacău: Editura Unique, 2008, p. 276–279.

• http://en.wikipedia.org/wiki/Descartes'_theorem

**2.** Una formulació equivalent a l'exposada, $x = \frac{abc}{2\sqrt{abc(a+b+c)} \pm (ab+ac+bc)}$, del teorema de Descartes que també vam fer servir per a la solució del problema **A85** publicada en *SCM/Notícies* 27, p. 58 la trobareu en línia a http://www.gogeometry.com/geometry/soddy_descartes_circles.htm. Una demostració directa es pot trobar a Dergiades, Nikolaos *The Soddy circles*, Forum Geometricorum, vol. 7, Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University, 2007, p. 193–194, accessible a http://forumgeom.fau.edu.

**A96.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Siguin $D$, $E$, $F$ els peus de les bisectrius interiors d'un triangle $ABC$. Si denotem per $[XYZ]$ l'àrea del triangle $XYZ$ i representam per $R$ i $r$ els respectius radis de les circumferències circumscrita i inscrita a $\triangle ABC$, demostrau que

$$\frac{r}{2R} \le \frac{[DEF]}{[ABC]} \le \frac{1}{4}$$

i deduïu-ne la desigualtat d'Euler, $R \ge 2r$.

**Solució:** (Solució i notes de Bruno Salgueiro, Viveiro, Lugo.) Suposem, com ja vaig fer a la solució del problema **A89** (*SCM/Notícies* 28, pàg. 59), que $D \in BC$, $E \in CA$ i $F \in AB$. En aquella mateixa solució, tot fent servir el *teorema de la bisectriu interior* aplicat successivament a les bisectrius interiors $AD$ i $BE$ del triangle $\triangle ABC$, es comprova que

$$DC = \frac{ab}{b+c}, \quad EC = \frac{ab}{a+c}.$$

De la mateixa manera,

$$BD = a - DC = \frac{ac}{b+c},$$
$$AE = b - EC = \frac{bc}{a+c},$$
$$AF = \frac{bc}{a+b}, \qquad BF = \frac{ac}{a+b}$$

i, si tenim en compte que

$$[ABC] = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$$

tenim

$$\begin{aligned}
[BDF] &= \frac{1}{2}\, BD\, BF\, \sin B = \\
&= \frac{1}{2}\, \frac{ac}{b+c}\, \frac{ac}{a+b}\, \frac{2[ABC]}{ac} = \\
&= \frac{ac}{(a+b)(b+c)}\, [ABC] \\
[CED] &= \frac{1}{2}\, CD\, CE\, \sin C = \\
&= \frac{1}{2}\, \frac{ab}{b+c}\, \frac{ab}{a+c}\, \frac{2[ABC]}{ab} = \\
&= \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\, [ABC] \\
[AFE] &= \frac{1}{2}\, AF\, AE\, \sin A = \\
&= \frac{1}{2}\, \frac{bc}{a+b}\, \frac{bc}{a+c}\, \frac{2[ABC]}{bc} = \\
&= \frac{bc}{(a+b)(a+c)}\, [ABC]
\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\begin{aligned}
&\frac{[DEF]}{[ABC]} = \\
&= \frac{[ABC]-[BDF]-[CED]-[AFE]}{[ABC]} = \\
&= 1 - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \\
&\qquad - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \\
&= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}.
\end{aligned}$$

El problema es tradueix, doncs, en provar la desigualtat

$$\frac{r}{2R} \le \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \le \frac{1}{4}$$

o les dues desigualtats simultànies

$$r(a+b)(b+c)(a+c) \le 4Rabc \qquad (*)$$

i

$$8abc \le (a+b)(b+c)(a+c) \qquad (**)$$

1) Demostració de la desigualtat $(*)$:

En fer servir el teorema dels sinus,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

tenim

$$\begin{aligned}
&r(a+b)(b+c)(a+c) = \\
&= r(2R\sin A + 2R\sin B) \\
&\quad (2R\sin B + 2R\sin C)(2R\sin A + 2R\sin C) = \\
&= 8R^3 r(\sin A + \sin B) \\
&\qquad (\sin B + \sin C)(\sin A + \sin C)
\end{aligned}$$

i, com que a tots els punts de l'interval $[0,\pi]$ la funció sinus no és més gran que la seva tangent, la desigualtat de Jensen dóna

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &\le 2\sin\frac{A+B}{2} \\
\sin B + \sin C &\le 2\sin\frac{B+C}{2} \\
\sin A + \sin C &\le 2\sin\frac{A+C}{2}
\end{aligned}$$

i, aleshores,

$$\begin{aligned}
&r(a+b)(b+c)(a+c) \le \\
&\le 64R^3 r \sin\frac{A+B}{2}\, \sin\frac{B+C}{2}\, \sin\frac{A+C}{2} = \\
&= 64R^3 r \sin\frac{\pi-C}{2}\, \frac{\pi-A}{2}\, \frac{\pi-B}{2} = \\
&= 64R^3 r \cos\frac{C}{2}\, \cos\frac{A}{2}\, \cos\frac{B}{2}.
\end{aligned}$$

Però,

$$\begin{aligned}
&\sin A + \sin B + \sin C = \\
&= (\sin A + \sin B) + (\sin C - \sin\pi) = \\
&= (\sin A + \sin B) + (\sin C - \sin(A+B+C)) = \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\, \cos\frac{A-B}{2} - \\
&\qquad - 2\sin\frac{A+B}{2}\, \cos\frac{A+B+2C}{2} = \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \right. \\
&\qquad \left. - \cos\frac{A+B+2C}{2}\right) = \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B+2C}{2}}{2}\right. \\
&\qquad \left. \sin\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B+2C}{2}}{2}\right) = \\
&= -4\sin\frac{A+B}{2}\, \sin\frac{A+C}{2}\, \sin\left(-\frac{B+C}{2}\right) = \\
&= 4\sin\frac{\pi-C}{2}\, \sin\frac{\pi-B}{2}\, \sin\frac{\pi-A}{2} = \\
&= 4\cos\frac{C}{2}\, \cos\frac{B}{2}\, \cos\frac{A}{2}
\end{aligned}$$

i, amb això i noves aplicacions del teorema dels sinus, arribem a la desigualtat desitjada:

$$\begin{aligned} r(a+b)(b+c)(a+c) &\leq \\ &\leq 16R^3 r\,(\sin A + \sin B + \sin C) = \\ &= 16R^3 r\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right) = \\ &= 8R^2 r(a+b+c) = 16R^2[ABC] = \\ &= 16R^2\frac{ab\sin C}{2} = 16R^2\frac{ab\frac{c}{2R}}{2} = \\ &= 16R^2\frac{abc}{4R} = 4Rabc, \end{aligned}$$

amb igualtat si, i només si, hi ha igualtat en cadascuna de les desigualtats de Jensen establertes; això és, si, i només si, $A = B = C$, és a dir, si, i només si, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.
2) La desigualtat $(**)$ és conseqüència immediata de la desigualtat de les mitjanes geomètrica i aritmètica $2\sqrt{xy} \leq x + y$:

$$\begin{aligned} 8abc = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 2\sqrt{ab}2\sqrt{bc}2\sqrt{ac} &\leq \\ \leq (a+b)(b+c)(a+c) \end{aligned}$$

amb igualtat si, i només si, $a = b = c$; és a dir, si, i només si, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

Queden, doncs, demostrades les desigualtats de l'enunciat. A més, com que

$$\frac{r}{2R} \leq \frac{1}{4}$$

és clar que

$$2r \leq R$$

amb igualtat si, i només si, el triangle $\triangle ABC$ és equilàter, que és la desigualtat d'Euler.

Notes

**1.** La relació $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ pels angles de qualsevol triangle $\triangle ABC$ fou establerta per l'autor com a lema 3 al número 24 de la *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática* (O. E. I.), (2006), problema 23.2, p. 16, accessible a www.oei.es/oim/revistaoim/numero24.htm.

**2.** La desigualtat $\frac{[DEF]}{[ABC]} \leq \frac{1}{4}$ és certa per a punts $D \in BC$, $E \in CA$ i $F \in AB$ qualssevol, sempre que les cevianes $AD$, $BE$ i $CF$ siguin concurrents en un punt. Això es prova a Bellot Rosado, Fco., «Algunas aplicaciones de la noción de área: el triángulo de Routh y los triángulos cevianos», *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática* (O. E. I.), (2004), p. 6, accessible a www.oei.es/oim/revistaoim/numero15.htm. D'altra banda, en el cas que $AD$, $BE$ i $CF$ siguin les bisectrius del triangle $\triangle ABC$, desigualtat proposada aquí, coincideix amb l'enunciat del problema 13, a la p. 8 d'aquest mateix article.

**3.** La desigualtat $8abc \leq (a+b)(b+c)(a+c)$ apareix al punt 1.4 del llibre de Bottema, O., *et al.*, *Geometric inequalities*, Groningen, Wolters–Noordhoff pub., 1968, i hom en proclama la validesa per a nombres reals no negatius $a$, $b$ i $c$ qualssevol. En el punt 9.8 del mateix llibre hi apareix la desigualtat $4[DEF] \leq [ABC]$, equivalent a l'altra de les proposades en aquest problema. Vegeu-ne també el punt 9.1.

**4.** Podeu consultar, també, el problema D.G./4 (p. 22) i la seva solució i generalització (p. 90–92) al llibre de Klamkin, Murray S., *Olimpiadas Internacionales de Matemáticas 1978–1986 y problemas suplementarios*, OREALC (UNESCO), Santiago de Xile, 1988, i el problema 2.865 de la revista *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem* (Canadian Mathematical Society) (2004), vol. 30, núm. 6, p. 375–376.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

## Tesis

- Gerard Fortuny Anguera va llegir la seva tesi, dirigida per Antonio Susín Sánchez, titulada *Dynamical analysis of lower abdominal wall in the human inguinal hernia*, el dia 20 de març de 2009. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona.